3ª Prova de Matemática I - CCM - 2º Sem 2005.

(1,5) **Questão 1** Sejam A e B reais dados. Prove que existem $C \geq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $C\cos(x+\alpha) = A\sin x + B\cos x \ \forall x$
(a,b)

(1,0) **Questão 2** Considere a curva $f(\theta) = \sqrt{|\cos\theta|}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(eq. em coordenadas polares).

(a) Faça um esboço da curva.

(b) Calcule a área do conjunto radial de f.

(1,5) **Questão 3** Um sólido tem por base a "elipse" de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ e cada secção perpendicular* a esta base é um triângulo equilátero. Determine o volume do sólido

(*) As secções são determinadas interseptando o sólido com os planos $y = cte$.

(1,5) **Questão 4** Considere o sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo dos y onde

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ x \leq y \leq -x^2 + 12\}$$

Calcule o volume do sólido

Questão 5 Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada e integrável e
(2,5)
considere $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

(0,5) (trivial) (i) Mostre que existe $L > 0$ tq $|A(x_1) - A(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ para todos os x_1, x_2 em $[a,b]$.

(2,0) (ii) Mostre que A é integrável em $[a,b]$.

(1,0) Questão 6 Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{x^2+x^4+1}}\,dx$. (fácil?)

$\hookrightarrow$ (função ímpar) $\Rightarrow \int_{-1}^{1} f\,dx = 0$

(difícil insight) (2,5) Questão 7. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diz-se que $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de mínimo local de f se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

Suponha que f é convexa e:

(1,0) (a) Mostrar que se x_1 e x_2, $x_1 < x_2$, são pontos de mínimo local de f então $f(x_1) = f(x_2)$.

(1,0) (b) Mostrar que se x_1 e x_2, $x_1 < x_2$, são pontos de mínimo local de f então $f(x) = f(x_1)$, $\forall x \in [x_1, x_2]$

(0,5) (c) Mostrar que se ~~[illegible]~~ x_1 é ponto de mínimo local de f então $f(x) \geq f(x_1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2,5) Questão 8. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2, integrável em todos os intervalos e par. Considere $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(1,0) (a) Prove que g é ímpar e que $g(x+2) = g(x) + g(2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(1,0) (b) Seja $A = g(1)$. Calcule $g(2)$ e $g(5)$ em função de A

(0,5) (c) Determine A para que g seja periódica de período 2.