MATEMÁTICA I - CCM - 2005

ÚLTIMA PROVA - Aos 08 de dezembro de 2005

GRUPO I

1.5 **Questão 1** Um triângulo retângulo tem hipotenusa medindo 1 e os catetos medem x e y. Ache o maior valor possível para $x + 3y$.

1.5 **Questão 2** Considere $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 7x^2 + Ax^{-7}$, onde $A \in \mathbb{R}$. Ache o menor valor de A para o qual $f(x) \geq 18$ para todo $x > 0$.

2,5 **Questão 3** Um cilindro é obtido pela rotação de um retângulo $\mathfrak{R}$ situado no plano xy em torno do eixo dos x. Um dos lados de $\mathfrak{R}$ está contido no eixo dos x, e $\mathfrak{R}$ está contido entre esse eixo e a curva $y = \frac{2x}{x^2+1}$. Qual o volume máximo que esse cilindro pode ter?
Obs. Pode ser usado que o volume de um cilindro circular reto de altura h e cujo círculo da base tem raio r é $\pi h r^2$. $\pi/4$

GRUPO II

1,0 **Questão 4** Demonstre que $\int_0^2 375 \frac{x^5}{(1+x^2)^4} dx = 2^n$, para algum inteiro n.

1,5 **Questão 5** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua safisfazendo

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^{17} t^4 f(t)dt + \frac{x^{34}}{17} + \frac{x^{38}}{19} + k,$$

onde $k \in \mathbb{R}$. Determine k e calcule $f(1)$.

2,0 **Questão 6** Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$, onde f é uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Prove que F é derivável e calcule $F'(x)$.

GRUPO III

1,5 **Questão 7** Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^x - x}{x^2} = L \in \mathbb{R}$. Calcular α e L.

2,0 **Questão 8** SEM CALCULAR INTEGRAL NENHUMA, por favor!!! Use que se $g(x)$ é $o(1)$ quando $x \to 0$ então $\frac{1}{1+g(x)} = 1 - g(x) + g^2(x) + o(g(x^2))$ quando $x \to 0$ e prove que

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5),$$

quando $x \to 0$.
Obs. Use a função $g(x) = \cdots + o(x^5)$ para escrever $\cos x = 1 + g(x)$ e depois lembre que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ e que $\sin x = \ldots$ (você não está pensando que eu vou fazer a questão, ou está?????)

GRUPO IV

1,0 **Questão 9** Calcular os limites abaixo.

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)},\ b \neq 0. \quad \text{(ii)} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - x}{1 - x - \ln x}.$$

1,5 **Questão 10** Calcular a e b para que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int\limits_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = 2$.

GRUPO V

2,0 **Questão 11** Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x^{2008}} \sin \frac{1}{x}$.

1,5 **Questão 12** Calcular $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\tan 2x}$.

2,0 **Questão 13** Sejam $g(x) = x^c e^{2x}$ e $f(x) = \int\limits_0^x e^{2t}\sqrt{1+3t^2}\,dt$, onde $c \in \mathbb{R}$. Para um determinado valor de c tem-se que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Calcule esse valor de c e determine L.

GRUPO VI

Questão 14 Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é dita lipschitziana se existe uma constante K tal que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$, para todos x e y em A.

0,5 [i] Mostre que toda função lipschitziana é uniformemente contínua.

1,0 [ii] Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e f' é periódica então f é lipschitziana.

1,5 [iii] Prove que $\varphi(x) = x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, é lipschitziana.

GRUPO VII Atendendo a pedidos...

Questão 15 Uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo, é chamada histérica
2,0 se todo ponto de I é ponto de máximo local ou de mínimo local de f. Prove que se f é histérica e contínua então f é constante.

2,0 **Questão 16** Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua, onde I é um intervalo. Prove que existe um intervalo $J \subset I$ tal que $f|_J$ é monótona.

2,0 **Questão 17** Mostre que não existe nenhuma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal
5,0 que $f(x) \in \mathbb{Q}$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, e $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, se $x \in \mathbb{Q}$.

(usar que $\mathbb{Q}$ é enumerável
e que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não é)
olhar para a imagem