Matemática I - CCM - 2005 - 6ª prova - 09-11-2005

Questão 1 (1,5 pontos) Sejam f e g funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que $f(x)=g(x)$, para todo $x\in\mathbb{Q}$. Prove que $f(x)=g(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

Questão 2 (2,5 pontos) Seja $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}\,dx$. Determine, em função de I, o valor de $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x\cos x}{1+x}\,dx$.

Questão 3 (2,0 pontos) Calcular:

a) $\displaystyle\int t\,\frac{\log(1+t^2)}{(1+t^2)}\,dt$

b) $\displaystyle\int\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$

Questão 4 (1,5) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável tal que existe $c\in\mathbb{R}$ satisfazendo $f'(x)=cf(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(0,5) (a) Seja $g(x):=e^{-cx}f(x)$. Prove que g é constante.

(1,0) (b) Mostre que existe $K\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=Ke^{cx}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Questão 5

(a) (0,5) Mostre que $1-\frac{1}{x}\leq\log x\leq x-1$, $\forall x>0$

(b) (1,0) Mostre que $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n<e^x$, para todo $x\in\mathbb{R}$ e que $\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}>e^x$, se $x>0$. (Aqui $n\in\mathbb{N}$).

Questão 6 Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável com derivada contínua tal que $f(a) = f(b) = 0$. Suponha que

$$\int_a^b f(x)\, e^x \, dx = \sqrt{2} \quad \text{e que} \quad \int_a^b f'(x) \cos x \, dx = \pi .$$

(i) Calcule $\int_a^b f'(x)\, e^x \, dx$. (0,5 ponto)

(ii) Calcule $\int_a^b f(x) \operatorname{sen} x \, dx$. (0,5 ponto).

Questão 7. Seja $f(x) = x^x$, $x > 0$.

(a) Calcular $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$. (1,5)

(b) Calcular $f'(x)$. (0,5)

(c) Calcular $f''(x)$. (0,5)

(d) Esboce o gráfico de f. (0,5)

Questão 8 (a) Prove que $0{,}6931460 < \log 2 < 0{,}6931476$. (0,5)

(b) Prove que $1{,}609435 < \log 5 < 1{,}609438$ (1,0).