

Prova #6 de Matemática II
CCM - Aos 22 de junho de 2006

Questão 1. Sejam $A = (1, -1, 1)$ e $T : V_3 \mapsto V_3$ dada por $T(X) := X \times A$.

- [i] Calcule $N = \{X \in V_3 : T(X) = 0\}$.
- [ii] Calcule a imagem de T , isto é, $I = \{Y \in V_3 : Y = T(X), X \in V_3\}$
- [iii] Ache um conjunto finito $S \subset V_3$, linearmente independente, tal que $I = L[S]$.

Questão 2. Seja $S = \{A_1, \dots, A_k\} \subset V_n$ um conjunto linearmente independente e considere $W = L[S]$.

Tome $W^\perp := \{X \in V_n : X \cdot Y = 0, \forall Y \in W\}$.

- [i] Mostre que se X e Y estão em W^\perp e $a \in \mathbb{R}$ então $aX + Y \in W^\perp$.
- [ii] Mostre que $X \in W^\perp$ se, e somente se, $X \cdot A_j = 0$, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$.
- [iii] Mostre que $W \cap W^\perp = \{0\}$.
- [iv] Prove que se $\{C_1, \dots, C_p\}$ é um conjunto linearmente independente que gera W^\perp então $\{A_1, \dots, A_k\} \cup \{C_1, \dots, C_p\}$ é linearmente independente.

Questão 3. Considere o plano de equação cartesiana $3x + ay - z = 17$, onde a é um real.

- [i] Determine os valores de a para os quais o plano dado é perpendicular à reta que passa por $(1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$.
- [ii] Determine os valores de a para os quais a distância do plano dado à origem é a menor possível.

Questão 4. Demonstrar que dados uma reta L e um ponto $P \notin L$ existe um, e apenas um, plano que contém L e P .

Questão 5. Façam os exercícios 13 e 14 da secção 13.25 do Apostol.

Questão 6. Exercício 22 da secção 13.25 do Apostol.

Questão 7. Uma cônica C é simétrica em relação a $P = (x_0, y_0)$ se, por definição,
$$P + X \in C \Leftrightarrow P - X \in C.$$

Considere a cônica de equação cartesiana $x^2 - \lambda xy + y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$.

- [i] Determinar os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais a cônica dada tenha um centro de simetria.
- [ii] Determinar, em função de λ , se a cônica dada é elipse, hipérbole ou parábola.